Početní část 2 - 10.6.2021

3. Množina M je omezená a uzavřená, tudíž je kompaktní, f je spojitá a nabývá tak na M svého maxima a minima. Nejprve si uvědomíme, že M je ve skutečnosti trojboký jehlan, má tak 4 stěny, 6 hran a 4 vrcholy. Tyto struktury budeme postupně zkoumat, začneme však lokálními extrémy uvnitř množiny M. Máme

$$\nabla f = (2x - 2y,\, 4y - 2x - 2z,\, 4z - 2y - 2)$$

Postupným dosazováním vyřešíme soustavu rovnic $\nabla f = 0$: nejprve $x = y$, poté $y = z$ a nakonec $z = 1$, dostáváme jediný stacionární bod $A = (1, 1, 1)$, který opravdu leží uvnitř M, protože splňuje všechny čtyři nerovnosti jako ostré. Funkční hodnota v bodě A je $f(A) = -1$.

Dále prozkoumáme stěny jehlanu.

1) Stěna $x = 0$. Rovnou dosadíme a máme novou funkci dvou proměnných $g_1(y, z) = 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2z$. Odtud

$$\nabla g_1 = (4y - 2z,\, 4z - 2y - 2)$$

Stacionární bod je $z = 2y$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{2}{3}$. Tedy $B_1 = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $f(B_1) = -\frac{2}{3}$.

2) Stěna $y = 0$. Rovnou dosadíme a máme novou funkci dvou proměnných $g_2(x, z) = x^2 + 2z^2 - 2z$. Odtud

$$\nabla g_2 = (2x,\, 4z - 2)$$

Stacionární bod je $x = 0$, $z = \frac{1}{2}$. Tedy $B_2 = (0, 0, \frac{1}{2})$. Tento bod neleží uvnitř stěny nýbrž na hraně a proto jej nebereme v potaz.

3) Stěna $z = 2$. Rovnou dosadíme a máme novou funkci dvou proměnných $g_3(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 4$. Odtud

$$\nabla g_3 = (2x - 2y,\, 4y - 2x - 4)$$

Stacionární bod je $x = y$, $x = 2$, $y = 2$. Tedy $B_3 = (2, 2, 2)$, což je bod ležící uvnitř příslušné stěny jehlanu (splňuje zbývající tři nerovnosti jako ostré). Platí $f(B_3) = 0$.

4) Stěna $x + y = 4z$. Také bychom mohli dosadit, nicméně můžemé také použít metodu Lagrangeových multiplikátorů. Gradient vazební funkce je nenulový, protože vazba je lineární. Označme

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda(x + y - 4z)$$
$$\nabla L = (2x - 2y - \lambda,\ 4y - 2x - 2z - \lambda,\ 4z - 2y - 2 + 4\lambda)$$

Při hledání stacionárních bodů funkce L dostaneme soustavu čtyř lineárních rovnic pro čtyři neznámé, sečtením prvních tří dohromady dostaneme $z = 1 - \lambda$, dosazením do součtu prvních dvou $y = z + \lambda = 1$ a dosazením do první rovnice $x = y + \frac{\lambda}{2} = 1 + \frac{\lambda}{2}$. Dosazením získaných vztahů do vazební podmínky máme $\lambda = \frac{4}{9}$ a odtud stacionární bod $B_4 = (\frac{11}{9}, 1, \frac{5}{9})$. Platí $f(B_4) = -\frac{5}{9}$.

Přejdeme na hrany jehlanu

1) Hrana $x = y = 0$: Dosadíme a získáme funkci $h_1(z) = 2z^2 - 2z$. Ta má stacionární bod $z = \frac{1}{2}$, což odpovídá bodu B_2, který jsme našli výše. Platí $f(B_2) = -\frac{1}{2}$.
2) Hrana $x = 0$, $z = 2$: Dosadíme a získáme funkci $h_2(y) = 2y^2 - 4y + 4$. Ta má stacionární bod $y = 1$, tedy $C_2 = (0, 1, 2)$. Platí $f(C_2) = 2$.
3) Hrana $y = 0$, $z = 2$: Dosadíme a získáme funkci $h_3(x) = x^2 + 4$. Ta má stacionární bod $x = 0$, tedy $C_3 = (0, 0, 2)$, což je vrchol jehlanu, který vyšetříme nakonec.
4) Hrana $x = 0$, $x + y = 4z$: Dosadíme a získáme funkci $h_4(z) = 26z^2 - 2z$. Ta má stacionární bod $z = \frac{1}{26}$, tedy $C_4 = (0, \frac{2}{13}, \frac{1}{26})$. Bod je uvnitř dané hrany a platí $f(C_4) = -\frac{1}{26}$.
5) Hrana $y = 0$, $x + y = 4z$: Dosadíme a získáme funkci $h_5(z) = 18z^2 - 2z$. Ta má stacionární bod $z = \frac{1}{18}$, tedy $C_5 = (\frac{2}{9}, 0, \frac{1}{18})$. Bod je uvnitř dané hrany a platí $f(C_5) = -\frac{1}{18}$.
6) Hrana $z = 2$, $x + y = 4z$: Dosadíme $x = 8 - y$ a získáme funkci $h_6(y) = 5y^2 - 36y + 68$. Ta má stacionární bod $y = \frac{18}{5}$, tedy $C_6 = (\frac{22}{5}, \frac{18}{5}, 2)$.Bod je uvnitř dané hrany a platí $f(C_6) = \frac{16}{5}$.

Nakonec nám zbývají vrcholy:

$$f(0, 0, 2) = 4,\ f(0, 8, 2) = 100,\ f(0, 0, 0) = 0,\ f(8, 0, 2) = 68.$$

Porovnáním hodnot zjistíme, že globální maximum funkce f na množině M je 100 a nabývá se v bodě $(0, 8, 2)$, globální minimum funkce f na množině M je -1 a nabývá se v bodě $(1, 1, 1)$.

4. Pro další potřeby zavedeme funkci

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \sin(ax + by + cz).$$

Abychom ověřili, že v bodě $(0,0,0)$ vztah $F(x,y,z) = 0$ lokálně určuje funkci $z(x,y)$, spočítáme

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - c\cos(ax + by + cz).$$

Lehce vidíme, že $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = -c \neq 0$, ze spojitosti derivace usoudíme, že $z \mapsto F(x,y,z)$ je na okolí $(0,0,0)$ monotónní, a proto můžeme používat větu o implicitní funkci.

Protože F je hladká funkce, tak také $z(x,y)$ bude hladká, k určení totálního diferenciálu tak potřebujeme spočítat parciální derivace funkce z. Zderivováním vztahu $F(x,y,z(x,y)) = 0$ podle x dostáváme

$$2x + 2z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - \cos(ax + by + cz(x,y))(a + c\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)) = 0$$

a odtud

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a\cos(ax + by + cz) - 2x}{2z - c\cos(ax + by + cz)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -\frac{a}{c}$$

Podobně zjistíme také derivaci podle y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b\cos(ax + by + cz) - 2y}{2z - c\cos(ax + by + cz)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -\frac{b}{c}.$$

Totální diferenciál funkce $z(x,y)$ v bodě $(0,0)$ je tak dán

$$\mathrm{d}z(0,0)(\mathbf{h}) = -\frac{ah_1 + bh_2}{c}.$$